1. IA elegida y justificación

Para resolver esta tarea elegí **ChatGPT, modelo GPT-5.5 Thinking**, porque permite desarrollar problemas económicos con explicación matemática paso a paso, construir funciones de beneficio, resolver condiciones de primer orden y elaborar gráficos de optimización.

La preferí frente a otras herramientas de IA porque no solo genera texto, sino que también ayuda a interpretar la teoría microeconómica, plantear modelos matemáticos y verificar si los resultados son coherentes. Además, permite conectar el ejercicio con la teoría del libro de **Pindyck y Rubinfeld**, especialmente los capítulos sobre monopolio, poder de mercado, fijación de precios y publicidad. El libro ubica estos contenidos en el Capítulo 10, sobre monopolio y poder de mercado, y en el Capítulo 11, sobre fijación de precios con poder de mercado, donde también aparece el tema de publicidad.

2. Prompts entregados a la IA

Prompt 1:
"Crea un problema de maximización del beneficio para una empresa monopólica que emplea publicidad. La empresa debe conocer la demanda del mercado y su función de costos. Los resultados de cantidad, precio y publicidad deben ser números enteros."

Prompt 2:
"Resuelve el problema paso a paso usando teoría microeconómica de monopolio, maximización de beneficios y publicidad. Explica las condiciones de primer orden y verifica que el resultado sea un máximo."

Prompt 3:
"Haz un gráfico de optimización entendible para explicar la solución del problema. Que no se vea demasiado artificial y que sea adecuado para una tarea universitaria."

Prompt 4:
"Explica matemáticamente el gráfico, de manera clara para comprenderlo, pero sin omitir la parte rigurosa."

3. Problema propuesto

Una empresa monopólica vende un producto diferenciado y emplea publicidad para desplazar positivamente su demanda. La empresa conoce su demanda inversa y su función de costos.

La demanda inversa del mercado es: $\boxed{P = 120 + 2A - Q}$

donde:

$$P = \text{precio}$$
$$Q = \textit{cantidad producida y vendida}$$
$$A = \textit{cantidad de publicidad, medida en campañas publicitarias}$$

La función de costos totales es: $\boxed{CT = 20Q + 3A^2}$

El término 20Q representa el costo de producción y $3A^2$ representa el costo total de publicidad. Se pide hallar la cantidad producida, el precio y la cantidad de publicidad que maximizan el beneficio de la empresa monopólica.

4. Solucionario del problema

El beneficio de la empresa es: $\pi = IT - CT$

El ingreso total es: $IT = PQ$;

Como: $P = 120 + 2A - Q$ $\rightarrow$ $IT = (120 + 2A - Q)Q$ $\rightarrow$ $IT = 120Q + 2AQ - Q^2$

El costo total es: $CT = 20Q + 3A^2$

Por tanto, el beneficio es:

$\pi = 120Q + 2AQ - Q^2 - 20Q - 3A^2$ $\rightarrow$ $\pi = 100Q + 2AQ - Q^2 - 3A^2$

Condiciones de primer orden

La empresa elige simultáneamente **Q** y **A**.

Primero derivamos respecto a **Q:** $\dfrac{\partial \pi}{\partial Q} = 100 + 2A - 2Q$

Igualamos a cero:
$$\begin{aligned} 100 + 2A - 2Q &= 0 \\ 2Q &= 100 + 2A \\ Q &= 50 + A \end{aligned}$$

Ahora derivamos respecto a **A**: $\dfrac{\partial \pi}{\partial A} = 2Q - 6A$

Igualamos a cero:
$$\begin{aligned} 2Q - 6A &= 0 \\ 2Q &= 6A \\ Q &= 3A \end{aligned}$$
; Ahora resolvemos el sistema:
$$\begin{aligned} Q &= 50 + A \\ Q &= 3A \end{aligned}$$

Sustituimos:
$$\begin{aligned} 3A &= 50 + A \\ 2A &= 50 \\ A &= 25 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} Q &= 3(25) \\ Q &= 75 \end{aligned}$$

Precio óptimo

Usamos la demanda inversa: $P = 120 + 2A - Q$

Sustituyendo:
$$P = 120 + 2(25) - 75$$
$$P = 120 + 50 - 75$$
$$P = 95$$

Beneficio máximo

$$\pi = PQ - CT$$
$$IT = 95(75) = 7125$$
$$CT = 20(75) + 3(25)^2$$
$$CT = 1500 + 1875$$
$$CT = 3375$$

Por tanto:
$$\pi = 7125 - 3375$$
$$\pi = 3750$$

Resultados finales

$$Q^* = 75$$
$$A^* = 25$$
$$P^* = 95$$
$$\pi^* = 3750$$

La empresa monopólica maximiza su beneficio produciendo **75 unidades**, cobrando un precio de **95** por unidad y realizando **25 campañas publicitarias**. El gasto total en publicidad es: $\boxed{3A^2 = 3(25)^2 = 1875}$

Interpretación económica

La publicidad aumenta la demanda porque aparece positivamente en la función: $\boxed{P = 120 + 2A - Q}$

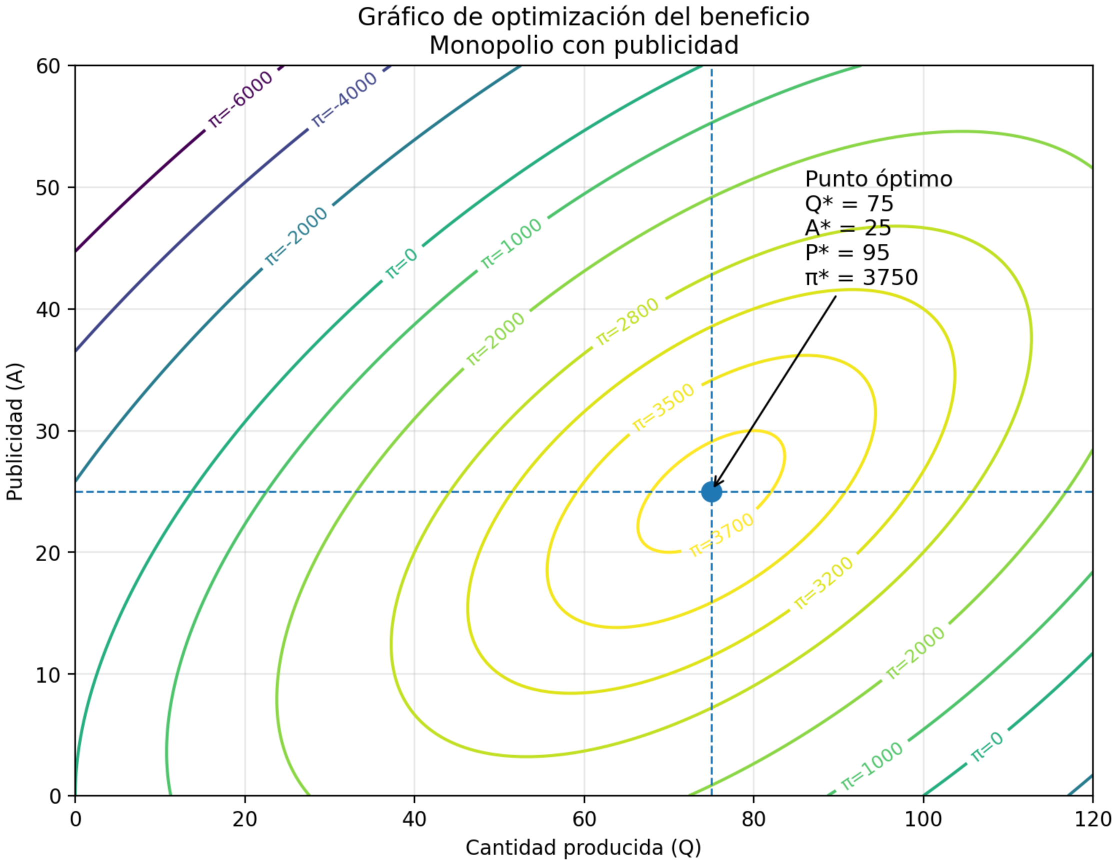
Esto significa que, para una misma cantidad vendida, una mayor publicidad permite cobrar un precio mayor. Sin embargo, la publicidad tiene costos crecientes: $\boxed{3A^2}$

Por eso la empresa no hace publicidad infinita. El nivel óptimo se alcanza cuando el ingreso marginal generado por una campaña adicional de publicidad se iguala con su costo marginal publicitario. **“una empresa con poder de mercado debe usar publicidad mientras el beneficio adicional generado por vender más unidades compense el costo de anunciarse.”**

<u>Gráfico de optimización</u>

El gráfico muestra curvas de isobeneficio para distintas combinaciones de cantidad **Q** y publicidad **A**. El punto marcado corresponde al máximo beneficio:

$$\boxed{Q^* = 75, \quad A^* = 25, \quad P^* = 95, \quad \pi^* = 3750}$$



Cada curva muestra combinaciones de Q y A que generan el mismo beneficio.
El punto marcado es la combinación que maximiza el beneficio.

$$\boxed{\begin{array}{l} Q = \text{cantidad producida} \\ A = \text{cantidad de publicidad} \end{array}}$$

El eje horizontal mide **Q** y el eje vertical mide **A**. Cada curva del gráfico representa un mismo nivel de beneficio, por eso se llaman **curvas de isobeneficio**.

1. De dónde sale la función que se grafica

El problema parte de la demanda inversa: $\boxed{P = 120 + 2A - Q}$

Esto significa que el precio depende de dos cosas:

- si aumenta **Q**, el precio baja;
- si aumenta **A**, la demanda mejora y la empresa puede cobrar más.

La función de costos es: $\boxed{CT = 20Q + 3A^2}$

El costo ***20Q*** es el costo de producir, y $\boldsymbol{3A^2}$ es el costo de hacer publicidad. Como está al cuadrado, la publicidad se vuelve cada vez más costosa.

El beneficio es: $\pi = IT - CT$

Como: $IT = PQ$ $\rightarrow$ $IT = (120 + 2A - Q)Q$ $\rightarrow$ $IT = 120Q + 2AQ - Q^2$

Ahora restamos los costos:

$\pi(Q,A) = 120Q + 2AQ - Q^2 - 20Q - 3A^2$ → $\pi(Q,A) = 100Q + 2AQ - Q^2 - 3A^2$

Esta es la función que se está graficando:

$$\pi(Q,A) = 100Q + 2AQ - Q^2 - 3A^2$$

2. Qué representa cada curva del gráfico

Cada curva representa combinaciones de **Q** y **A** que generan el mismo beneficio.

Por ejemplo, **una curva** puede representar: **π=1000,** otra: **π=2000,** otra: **π=3500** y así sucesivamente.

Matemáticamente, cada curva sale de fijar un nivel de beneficio **"k"**:

$$100Q + 2AQ - Q^2 - 3A^2 = k$$

Entonces, una **curva de isobeneficio** es: $\pi(Q,A) = k$

La empresa quiere moverse hacia curvas de beneficio cada vez más alto. En el gráfico, el punto óptimo está cerca de la curva de beneficio más alta.

3. Por qué el punto óptimo es Q*=75 y A*=25

La empresa elige **Q** y **A** para maximizar: $\pi(Q,A) = 100Q + 2AQ - Q^2 - 3A^2$

Como hay dos variables de decisión, usamos derivadas parciales.

Primero derivamos respecto a **Q**: $\dfrac{\partial \pi}{\partial Q} = 100 + 2A - 2Q$

La condición de primer orden exige:

$$\begin{aligned} 100 + 2A - 2Q &= 0 \\ 2Q &= 100 + 2A \\ Q &= 50 + A \end{aligned}$$

Esta condición dice que, dada la publicidad, la empresa produce hasta que el beneficio marginal de producir una unidad más se vuelve cero.

Ahora derivamos respecto a **A:** $\dfrac{\partial \pi}{\partial A} = 2Q - 6A$

Igualamos a cero: $$\begin{aligned} 2Q-6A&=0\\ 2Q&=6A\\ Q&=3A \end{aligned}$$

Esta condición dice que la empresa hace publicidad hasta que el ingreso adicional generado por la publicidad se iguala con su **costo marginal**. La publicidad debe aumentar hasta que **el ingreso marginal** derivado de la publicidad sea igual **al costo marginal** total asociado a ella.

Ahora resolvemos el sistema: $\begin{matrix} Q=50+A \\ Q=3A \end{matrix}$; Sustituimos: $\begin{aligned} 3A&=50+A\\ 2A&=50\\ A&=25 \end{aligned}$

Luego: $\begin{aligned} Q&=3(25)\\ Q&=75 \end{aligned}$

Por eso el punto marcado en la gráfica es: $\boxed{Q^*=75}$ $\boxed{A^*=25}$

4. Cómo se obtiene el precio óptimo

El precio no aparece como eje en la gráfica porque se obtiene después, usando la demanda:

$$\boxed{P=120+2A-Q}$$

Sustituimos los valores óptimos: $\begin{aligned} P&=120+2(25)-75\\ P&=120+50-75\\ P&=95 \end{aligned}$

Por tanto: $\boxed{P^*=95}$

5. Cómo se obtiene el beneficio máximo El ingreso total es: $\begin{aligned} IT&=PQ\\ IT&=95(75)\\ IT&=7125 \end{aligned}$

El costo total es: $\begin{aligned} CT&=20Q+3A^2\\ CT&=20(75)+3(25)^2\\ CT&=1500+1875\\ CT&=3375 \end{aligned}$

$$\pi = IT - CT$$

Entonces: $\pi = 7125 - 3375$

$$\boxed{\pi^* = 3750}$$

6. Por qué sabemos que es un máximo y no un mínimo

Esta parte es importante para que la solución sea rigurosa. La función de beneficio es:

$$\boxed{\pi(Q, A) = 100Q + 2AQ - Q^2 - 3A^2}$$

La matriz Hessiana es: $H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q^2} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q \partial A} \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial A \partial Q} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial A^2} \end{pmatrix}$

Calculamos:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial A^2} = -6$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q \partial A} = 2$$

Entonces: $H = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

Para que haya un máximo estricto, la Hessiana debe ser negativa definida.

Primero: −2<0, Luego calculamos el determinante: $\begin{aligned}&(-2)(-6) - (2)(2)\\ &12 - 4 = 8\\ &8 > 0\end{aligned}$

Como el primer elemento principal es negativo y el determinante es positivo, la Hessiana es negativa definida. Por tanto, la función de beneficio es estrictamente cóncava y el punto encontrado es un **máximo único**.

7. Interpretación económica de la gráfica

La gráfica muestra que la empresa no debe elegir ni muy poca ni demasiada publicidad.

Si la empresa hace poca publicidad, la demanda no aumenta lo suficiente y el beneficio es menor.

Si hace demasiada publicidad, el costo: $\boxed{3A^2}$

También muestra que la empresa no debe producir ni muy poco ni demasiado.

Si produce poco, deja de vender unidades rentables.

Si produce demasiado, el precio cae porque: $\boxed{P = 120 + 2A - Q}$ y eso reduce el ingreso.

Por eso existe una combinación óptima: $\boxed{Q^* = 75, \quad A^* = 25}$

En ese punto, la empresa alcanza la curva de isobeneficio más alta posible: $\boxed{\pi^* = 3750}$

Y el precio correspondiente es: $\boxed{P^* = 95}$

En palabras simples:

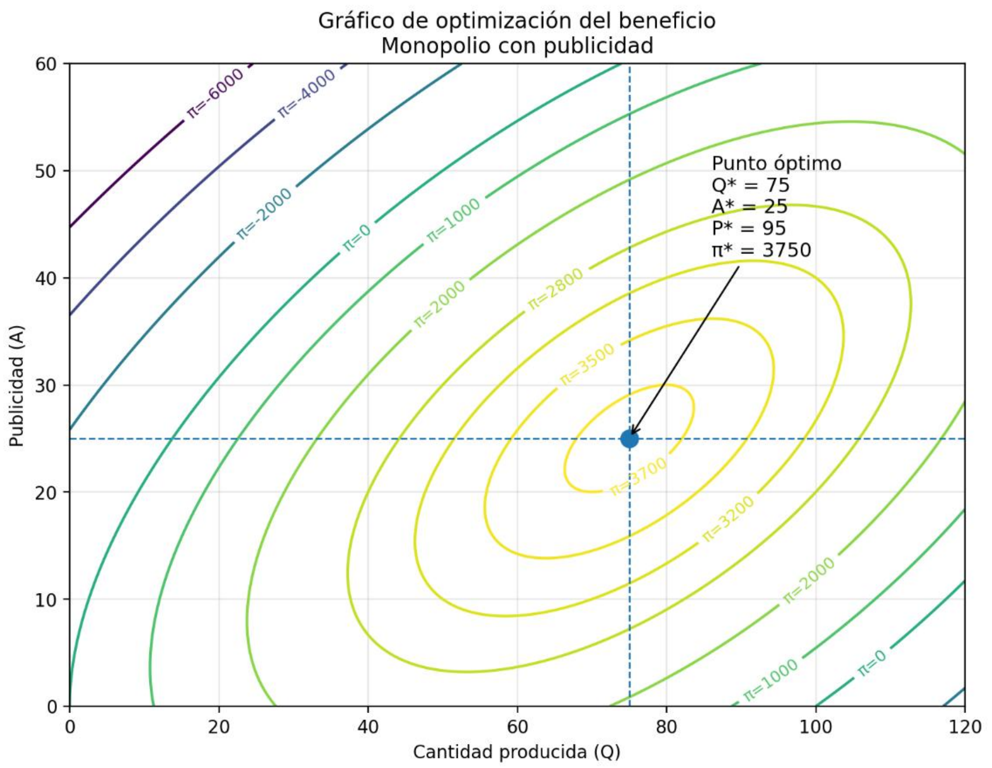
“La gráfica muestra que la empresa maximiza beneficios cuando combina producción y publicidad de forma equilibrada: produce 75 unidades y realiza 25 unidades de publicidad.”

5. Gráficos que explican la solución

Gráfico de optimización

El gráfico muestra curvas de isobeneficio para distintas combinaciones de cantidad **Q** y publicidad **A**. El punto marcado corresponde al máximo beneficio:

$$\boxed{Q^* = 75, \quad A^* = 25, \quad P^* = 95, \quad \pi^* = 3750}$$



Cada curva muestra combinaciones de Q y A que generan el mismo beneficio.
El punto marcado es la combinación que maximiza el beneficio.

Esta gráfica se entiende como un **mapa de beneficios**. No es una gráfica de demanda tradicional **P-Q**, sino una gráfica donde la empresa elige simultáneamente:

$$\boxed{\begin{array}{l} Q = \text{cantidad producida} \\ A = \text{cantidad de publicidad} \end{array}}$$

El eje horizontal mide **Q** y el eje vertical mide **A**. Cada curva del gráfico representa un mismo nivel de beneficio, por eso se llaman **curvas de isobeneficio**.

1. De dónde sale la función que se grafica

El problema parte de la demanda inversa: $\boxed{P = 120 + 2A - Q}$

Esto significa que el precio depende de dos cosas:

- si aumenta **Q**, el precio baja;
- si aumenta **A**, la demanda mejora y la empresa puede cobrar más.

La función de costos es: $\boxed{CT = 20Q + 3A^2}$

El costo ***20Q*** es el costo de producir, y ***3A²*** es el costo de hacer publicidad. Como está al cuadrado, la publicidad se vuelve cada vez más costosa.

El beneficio es: $\boxed{\pi = IT - CT}$

Como: $\boxed{IT = PQ} \rightarrow \boxed{IT = (120 + 2A - Q)Q} \rightarrow \boxed{IT = 120Q + 2AQ - Q^2}$

Ahora restamos los costos:

$$\boxed{\pi(Q, A) = 120Q + 2AQ - Q^2 - 20Q - 3A^2} \rightarrow \boxed{\pi(Q, A) = 100Q + 2AQ - Q^2 - 3A^2}$$

Esta es la función que se está graficando:

$$\boxed{\pi(Q, A) = 100Q + 2AQ - Q^2 - 3A^2}$$

2. Qué representa cada curva del gráfico

Cada curva representa combinaciones de **Q** y **A** que generan el mismo beneficio.

Por ejemplo, **una curva** puede representar: **π=1000,** otra: **π=2000,** otra: **π=3500** y así sucesivamente.

Matemáticamente, cada curva sale de fijar un nivel de beneficio **"k"**:

$$\boxed{100Q + 2AQ - Q^2 - 3A^2 = k}$$

Entonces, una **curva de isobeneficio** es: $\boxed{\pi(Q, A) = k}$

La empresa quiere moverse hacia curvas de beneficio cada vez más alto. En el gráfico, el punto óptimo está cerca de la curva de beneficio más alta.

3. Por qué el punto óptimo es Q*=75 y A*=25

La empresa elige **Q** y **A** para maximizar: $\boxed{\pi(Q,A)=100Q+2AQ-Q^2-3A^2}$

Como hay dos variables de decisión, usamos derivadas parciales.

Primero derivamos respecto a **Q**: $\boxed{\frac{\partial\pi}{\partial Q}=100+2A-2Q}$

La condición de primer orden exige:
$$\begin{aligned}100+2A-2Q&=0\\2Q&=100+2A\\Q&=50+A\end{aligned}$$

Esta condición dice que, dada la publicidad, la empresa produce hasta que el beneficio marginal de producir una unidad más se vuelve cero.

Ahora derivamos respecto a **A:** $\boxed{\frac{\partial\pi}{\partial A}=2Q-6A}$

Igualamos a cero:
$$\begin{aligned}2Q-6A&=0\\2Q&=6A\\Q&=3A\end{aligned}$$

Esta condición dice que la empresa hace publicidad hasta que el ingreso adicional generado por la publicidad se iguala con su **costo marginal**. La publicidad debe aumentar hasta que **el ingreso marginal** derivado de la publicidad sea igual **al costo marginal** total asociado a ella.

Ahora resolvemos el sistema: $\begin{aligned}Q&=50+A\\Q&=3A\end{aligned}$; Sustituimos: $\begin{aligned}3A&=50+A\\2A&=50\\A&=25\end{aligned}$

Luego: $\begin{aligned}Q&=3(25)\\Q&=75\end{aligned}$

Por eso el punto marcado en la gráfica es: $\boxed{Q^*=75}$ $\boxed{A^*=25}$

4. Cómo se obtiene el precio óptimo

El precio no aparece como eje en la gráfica porque se obtiene después, usando la demanda:

$$\boxed{P = 120 + 2A - Q}$$

Sustituimos los valores óptimos: $\begin{aligned} P &= 120 + 2(25) - 75 \\ P &= 120 + 50 - 75 \\ P &= 95 \end{aligned}$

Por tanto: $\boxed{P^* = 95}$

5. Cómo se obtiene el beneficio máximo El ingreso total es: $\begin{aligned} IT &= PQ \\ IT &= 95(75) \\ IT &= 7125 \end{aligned}$

El costo total es: $\begin{aligned} CT &= 20Q + 3A^2 \\ CT &= 20(75) + 3(25)^2 \\ CT &= 1500 + 1875 \\ CT &= 3375 \end{aligned}$

Entonces: $\begin{aligned} \pi &= IT - CT \\ \pi &= 7125 - 3375 \\ &\boxed{\pi^* = 3750} \end{aligned}$

6. Por qué sabemos que es un máximo y no un mínimo

Esta parte es importante para que la solución sea rigurosa. La función de beneficio es:

$$\boxed{\pi(Q, A) = 100Q + 2AQ - Q^2 - 3A^2}$$

La matriz Hessiana es: $H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial Q^2} & \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial Q \partial A} \\ \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial A \partial Q} & \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial A^2} \end{pmatrix}$

Calculamos: $\begin{aligned} \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q^2} &= -2 \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial A^2} &= -6 \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q \partial A} &= 2 \end{aligned}$

Entonces: $$H = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Para que haya un máximo estricto, la Hessiana debe ser negativa definida.

Primero: −2<0, Luego calculamos el determinante:

$$\begin{aligned} &(-2)(-6)-(2)(2) \\ &12-4=8 \\ &8>0 \end{aligned}$$

Como el primer elemento principal es negativo y el determinante es positivo, la Hessiana es negativa definida. Por tanto, la función de beneficio es estrictamente cóncava y el punto encontrado es un **máximo único**.

7. Interpretación económica de la gráfica

La gráfica muestra que la empresa no debe elegir ni muy poca ni demasiada publicidad.

Si la empresa hace poca publicidad, la demanda no aumenta lo suficiente y el beneficio es menor.

Si hace demasiada publicidad, el costo: $\boxed{3A^2}$

También muestra que la empresa no debe producir ni muy poco ni demasiado.

Si produce poco, deja de vender unidades rentables.

Si produce demasiado, el precio cae porque: $\boxed{P=120+2A-Q}$ y eso reduce el ingreso.

Por eso existe una combinación óptima: $\boxed{Q^*=75, \quad A^*=25}$

En ese punto, la empresa alcanza la curva de isobeneficio más alta posible: $\boxed{\pi^*=3750}$

Y el precio correspondiente es: $\boxed{P^*=95}$

En palabras simples:

“La gráfica muestra que la empresa maximiza beneficios cuando combina producción y publicidad de forma equilibrada: produce 75 unidades y realiza 25 unidades de publicidad.”

6. Opinión sobre el trabajo realizado por la IA

Considero que la IA fue útil para desarrollar esta tarea porque ayudó a construir un problema coherente con la teoría de monopolio y publicidad. La herramienta permitió plantear una demanda donde la publicidad aumenta la disposición a pagar de los consumidores, una función de costos con costos crecientes de publicidad y una función de beneficio que puede maximizarse matemáticamente.

También fue útil porque los resultados obtenidos son números enteros, tal como pedía la tarea: $\boxed{Q^* = 75, \quad A^* = 25, \quad P^* = 95, \quad \pi^* = 3750}$

Además, la IA ayudó a elaborar gráficos que permiten interpretar mejor la solución. Sin embargo, considero que el resultado no debe copiarse de forma automática sin revisarlo. Es importante verificar las derivadas, las condiciones de primer orden, la Hessiana y la interpretación económica. La IA funciona como apoyo, pero el estudiante debe comprender el procedimiento para poder defenderlo en clase o en un examen.